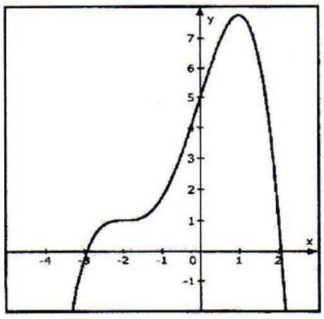
Fachabitur Mathematik 2015
Lösungen

Aufgabe 3:

3. Aufgabe 8 Punkte

Die Skizze zeigt den Graphen der Funktion f mit

$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x + 5$.



3.1 Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Kurvenpunkt SP(– 2 | 1) ein Sattelpunkt ist.

3.2 Im Ordinatenschnittpunkt hat die Kurve einen weiteren Wendepunkt. Zeigen Sie, dass dessen Wendetangente t_w die Funktionsgleichung $t_w(x) = 4x + 5$ hat.

3.3 Zeigen Sie, dass die Tangente t_w den Graphen der Funktion f nur noch in einem weiteren Punkt P(– 4 | – 11) schneidet.

3.4 Berechnen Sie die Fläche, die die Kurve mit der Tangente einschließt.

3.1

SP(-2/1) ist Sattelpunkt.

Bedingung für die Existenz eines Sattelpunktes:
Der Graph hat an dieser Stelle eine horizontale Tangente; an dieser Stelle findet kein Vorzeichenwechsel der 1. Ableitung statt (kein lokales Extremum)

f'(-2) = 0

-2 ist eine Wendestelle:

f''(-2) = 0

Hinreichende Bedingung: an der Stelle x = -2 wechselt das Vorzeichen von f''(x)

Ableitungen:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x + 5$$
$$f'(x) = -x^3 - 3x^2 + 4$$
$$f''(x) = -3x^2 - 6x$$

$$f'(-2) = -(-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 + 4$$
$$f'(-2) = 8 - 12 + 4$$
$$f'(-2) = 0$$

<u>kein Vorzeichenwechsel von f':</u>

-3 < -2 < -1
f'(-3) = 4
f'(-2) = 0
f'(-1) = 2
An der Stelle x = -2 wechselt das Vorzeichen nicht, links von x = -2 ist die Steigung positiv, rechts ebenfalls.

$$f''(-2) = -3 \cdot (-2)^2 - 6 \cdot (-2)$$
$$f''(-2) = -12 + 12$$
$$f''(-2) = 0$$

<u>Vorzeichenwechsel von f'':</u>

-3 < -2 < -1
f''(-3) = -9
f''(-2) = 0
f''(-1) = 3
An der Stelle x = -2 wechselt das Vorzeichen , links von x = -2 ist das Vorzeichen von f'' negativ, rechts positiv.

3.2

<u>Schnittpunkt mit der y-Achse (Ordinatenschnittpunkt)</u>:

f(0) = 5
WP(0/5)
Wendetangente ist die Tangente im Wendepunkt; die Steigung der Wendetangenten ist gleich der Steigung der Kurve im Wendepunkt WP(0/5)

<u>Bestimmung der Kurvensteigung im Wendepunkt</u>:

f'(0) = 4

Damit ist die Steigung der Wendetangente m = 4.

Die Gleichung der Wendetangenten lautet:

$$t_w(x) = 4x + b$$

<u>Berechnung von b</u>:
Der Wendepunkt WP(0/5) liegt auf der Wendetangenten, d.h. seine Koordinaten erfüllen die Funktionsgleichung.

WP(0/5)

$$5 = 4 \cdot 0 + b$$

$$b = 5$$

3.3

Der Schnittpunkt P(-4/-11) liegt sowohl auf der Wendetangenten als auch auf dem Graphen; seine Koordinaten müssen sowohl die Gleichung der Wendetangenten erfüllen als auch die Gleichung der Kurve.

Erfüllung der Gleichung der Wendetangenten:

P(-4/-11):
$$-11 = 4 \cdot (-4) + 5$$
$$-11 = -11$$

Erfüllung der Kurvengleichung:

P(-4/-11):
$$-11 = -\frac{1}{4} \cdot (-4)^4 - (-4)^3 + 4 \cdot (-4) + 5$$
$$-11 = -64 + 64 - 16 + 5$$
$$-11 = -11$$

3.4

Die Aufgabe kannst du noch nicht lösen, weil ihr die Integralrechnung noch nicht behandelt habt.