Fachabitur Mathematik 2015
Lösungen

Aufgabe 2:

2. Aufgabe 13 Punkte

2.1 Gegeben ist die Funktion g mit der Funktionsgleichung

$$g(x) = \frac{x+4}{x^2-a^2} = \frac{x+4}{(x-a)(x+a)} \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie a so, dass die Funktion g

2.1.1 eine Polstelle und eine Lücke hat.

2.1.2 eine Polstelle und keine Lücke hat.

2.1.3 zwei Polstellen und keine Lücke hat.

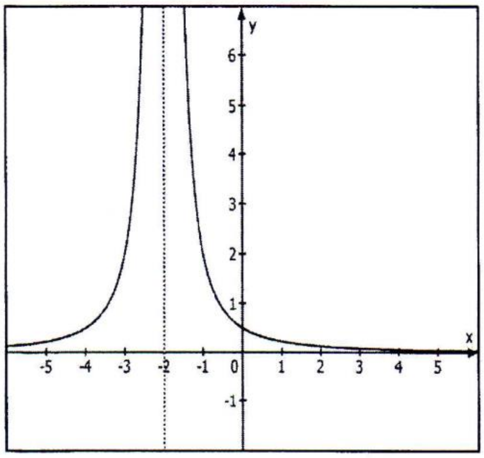
2.2 Ordnen Sie den beiden skizzierten Graphen 1 und 2 jeweils eine der folgenden fünf Funktionsgleichungen zu. Begründen Sie Ihre Entscheidung mit jeweils drei Argumenten wie z.B. Übereinstimmung bei der Symmetrie, den Achsenschnittpunkten, den Definitionslücken, dem Grenzverhalten etc.

BBZ Merzig	Mathematik		
GS Fos 12	Prüfung 2015	26.1.16	

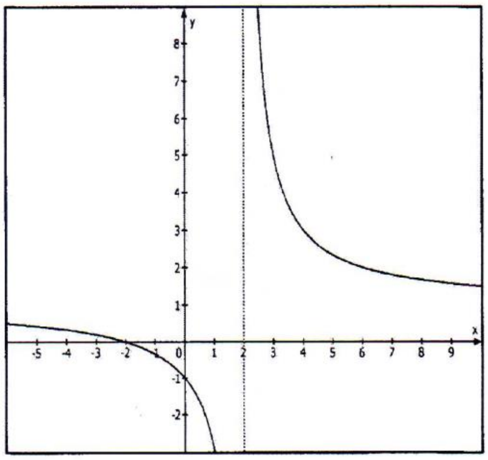
$h(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$ $\qquad$ $k(x) = \dfrac{2}{(x-2)(x-2)}$ $\qquad$ $l(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$

$m(x) = \dfrac{2}{(x-2)(x+2)}$ $\qquad$ $n(x) = \dfrac{2}{(x+2)(x+2)}$

Graph 1



Graph 2



2.3 Bestimmen Sie für die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \dfrac{2x^2+6x}{x^2-9}$

2.3.1 den maximalen Definitionsbereich.

2.3.2 die Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen.

2.3.3 die Ersatzfunktion $f_E(x)$.

2.3.4 die Art der Definitionslücken.

2.3.5 das Symmetrieverhalten mit Begründung.

2.3.6 die Grenzfunktion und das Verhalten im Unendlichen.

2.3.7 die 1. und 2. Ableitung von $f_E(x)$.

zur Kontrolle: $f_E'(x) = \dfrac{-6}{(x-3)^2}$ $\qquad$ $f_E''(x) = \dfrac{12}{(x-3)^3}$

2.3.8 Extremum und Wendepunkt (falls vorhanden).

2.1 (2.1.1; 2.1.2; 2.1.3)

Die Aufgabenstellung macht nach meiner Meinung keinen Sinn.

Gebrochen rationale Funktionen haben an den Nullstellen des Nenners Definitionslücken: die Definitionslücke kann entweder eine <u>Polstelle</u> (an dieser Stelle muss die Zählerfunktion ≠ 0 sein) oder die Definitionslücke kann <u>behebbar</u> sein (an dieser Stelle muss die Zählerfunktion = 0 sein).
Deshalb kann ich mit der Formulierung
„Bestimme a so, dass die Funktion g *eine Polstelle* <u>*und*</u> *eine Lücke hat*" nichts anfangen; wenn sie eine Polstelle hat, hat sie dort automatisch auch eine Definitionslücke.
Folgende Fälle wären mathematisch interessant:

1. a = 4

$$g(x) = \frac{x+4}{(x-4)\cdot(x+4)}$$

g(x) hat zwei Definitionslücken:

1. Lücke bei x = 4: es handelt sich um eine **Polstelle,** weil Z(4) = 8 ≠ 0 ist.
2. Lücke bei x = - 4 es handelt sich um eine **behebbare Definitionslücke,** weil Z(-4) = 0 ist
Behebung (kürze mit (x + 4)) und setze dann – 4 ein:
g(-4) = $-\frac{1}{8}$

2. a = 0

$$g(x) = \frac{x+4}{x^2}$$

g(x) hat eine Definitionslücke

Lücke bei x = 0: (es handelt sich um eine **Polstelle**, weil Z(0) = 4 ≠ 0 ist

3. $a \in R \setminus \{ 0; 4 \}$

g(x) hat zwei Definitionslücken; es handelt sich in beiden Fällen um **Polstellen,** weil die Zählerfunktion nur an der Stelle x = -4 den Wert 0 hat.

2.2

zu Graph 1 gehört die Funktionsgleichung $n(x) = \frac{2}{(x+2)\cdot(x+2)}$

<u>Begründung:</u>
- an der Stelle x = -2 ist eine Polstelle
- $n(0) = \frac{2}{(0+2)\cdot(0+2)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2}{(x+2)\cdot(x+2)} = 0^{+}$

zu Graph 2 gehört die Funktionsgleichung $l(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$

Begründung:

- x = -2 ist Nullstelle von l
- y = 1 ist waagerechte Asymptote
- x = 2 ist Polstelle

2.3

$$f(x) = \frac{2\cdot x^2 + 6x}{x^2 - 9} = \frac{2x\cdot(x+3)}{(x+3)\cdot(x-3)}$$

2.3.1

D_{max} = R \ { 3 }; die Definitionslücke bei x = -3 ist behebbar mit

f(-3) = $f(-3) = \dfrac{2\cdot(-3)}{(-3-3)} = 1$

2.3.2

Schnittpunkt mit der x-Achse:

für alle x ≠ -3 kann man die Ersatzfunktion $f_E(x) = \dfrac{2\cdot x}{(x-3)}$ diskutieren.

d.h. x = 0 ist **Nullstelle**.

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$f_E(0) = \dfrac{2\cdot 0}{(0-3)} = 0$ d.h. der Graph schneidet die y-Achse im Ursprung.

2.3.3

$$f_E(x) = \frac{2\cdot x}{(x-3)}$$

2.3.4

x = 3 ist eine **Polstelle**
x = -3 ist eine **behebbare Definitionslücke**

2.3.5

Klappsymmetrie:

$$f(x) = f(-x)$$
$$\frac{2x^2+6x}{x^2-9} \neq \frac{2\cdot(-x)^2+6\cdot(-x)}{(-x)^2-9} = \frac{2x^2-6x}{x^2-9}$$

Punktsymmetrie:

$$f(x) = -f(-x)$$
$$\frac{2x^2+6x}{x^2-9} \neq -\frac{2\cdot(-x)^2+6\cdot(-x)}{(-x)^2-9} = -\frac{2x^2-6x}{x^2-9} = \frac{-1\cdot(2x^2-6x)}{x^2-9} = \frac{-2x^2+6x}{x^2-9}$$

2.3.6

Grenzfunktion (waagerechte Asymptote): y = 2

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2+6x}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to+\infty}(2+\frac{6x+18}{x^2-9}) = 2^+$ d.h. der Graph nähert sich für $x \to +\infty$ von oben an y = 2.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2+6x}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to-\infty}(2+\frac{6x+18}{x^2-9}) = 2^-$ d.h. der Graph nähert sich für $x \to -\infty$ von unten an y = 2.

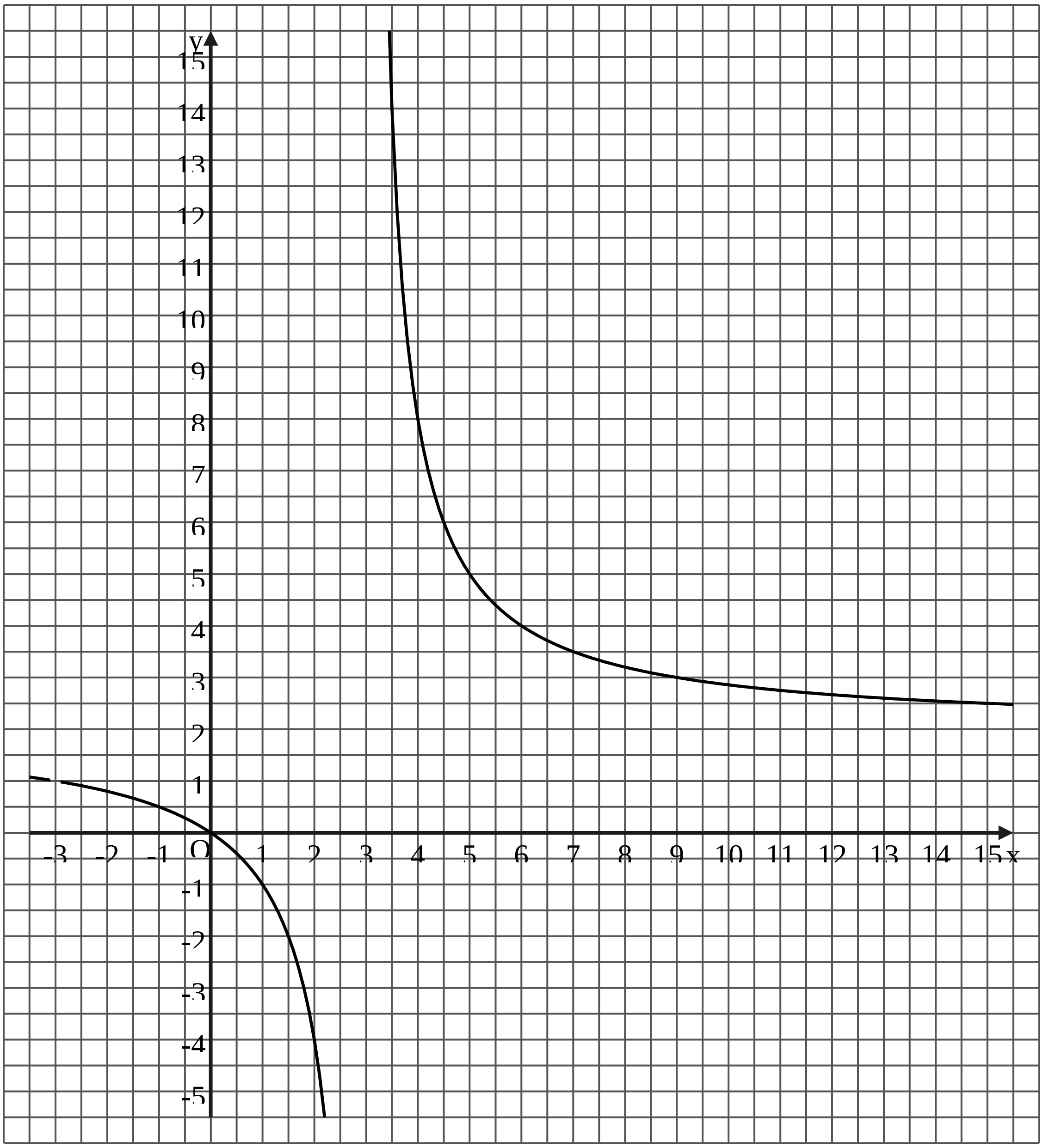
2.3.7

Ableitungen von $f_E(x)$

$$f'_E(x) = \frac{-6}{(x-3)^2}$$
$$f''_E(x) = \frac{12}{(x-3)^3}$$

keine Maximumstelle, keine Minimumstelle, d.h. keine Extrema
die erste Ableitung ist an keiner Stelle 0
keine Wendestelle, d.h. kein Wendepunkt
die zweite Ableitung ist an keiner Stelle 0

Graph


y
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
O
-1
-2
-3
-4
-5
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
x