Fachabitur Mathematik 2015
Lösungen

<u>Aufgabe</u> 1:

<u>1. Aufgabe</u> 11 Punkte

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = -x^3 - 3x^2 + x + 3$

1.1 Bestimmen Sie

1.1.1 das Symmetrieverhalten mit Begründung.

1.1.2 das Verhalten von f im Unendlichen.

1.1.3 die Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen.

1.1.4 Art und Lage der Extrempunkte von f.

1.1.5 den Wendepunkt von f.

1.1.6 das Krümmungsverhalten des Graphen.

1.2 Zeichnen Sie unter Beachtung der ermittelten Eigenschaften den Graphen der Funktion f für $x \in [-3{,}4\ ;\ 1{,}4]$.

1.3 Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion f und der x – Achse eingeschlossen wird.

1.1.1

<u>Bedingung für Klappsymmetrie</u>:
f(x) = f(-x)
dies gilt nur, wenn alle Exponenten im Funktionsterm **gerade** sind.
<u>Bedingung für Punktsymmetrie zum Ursprung</u>:
f(x) = -f(-x)
dies gilt nur, wenn alle Exponenten im Funktionsterm **ungerade** sind.

Der obige Funktionsterm hat sowohl gerade wie auch ungerade Exponenten, d.h.
Es liegt keine Symmetrie vor.

1.1.2

$$\lim_{x\to\infty}(-x^3 - 3x^2 + x + 3) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(-x^3 - 3x^2 + x + 3) = +\infty$$

1.1.3

Schnittpunkt mit der x-Achse (Nullstelle):

Bedingung
f(x) = 0
$$-x^3 - 3x^2 + x + 3 = 0$$
Durch Erraten (ganzzahlige Teiler von +3) erhält man als erste Nullstelle: x = 1

Durch **Polynomdivision** bzw. **Horner Schema** ergibt sich:

$$-x^3 - 3x^2 + x + 3 = (x-1)\cdot(-x^2 - 4x - 3)$$

weitere Nullstellen erhält man, wenn man die quadratische Gleichung

$-x^2 - 4x - 3 = 0$ löst.

$$-x^2 - 4x - 3 = 0$$
$$x^2 + 4x + 3 = 0$$
$$x^2 + 4x + 2^2 = -3 + 4$$
$$(x+2)^2 = 1$$
$$x + 2 = 1 \vee x + 2 = -1$$
$$x = -1 \vee x = -3$$

Nullstellen: -3; -1; 1

Schnittpunkt mit der y-Achse:

P(0/f(0))
$$f(0) = -0^3 - 3\cdot 0^2 + 0 + 3$$
$$f(0) = 3$$
P(0/3)

1.1.4

Bedingung für Maximumstelle:

Notwendig: f'(x) = 0
Hinreichend: f''(x) < 0

Bedingung für Minimumstelle:

Notwendig: f'(x) = 0
Hinreichend: f''(x) > 0

$$f'(x) = -3x^2 - 6x + 1$$
$$f''(x) = -6x - 6$$
$$f''' = -6$$

$$-3x^2 - 6x + 1 = 0$$
$$x^2 + 2x - \frac{1}{3} = 0$$
$$x^2 + 2x + 1 = \frac{1}{3} + 1$$
$$(x+1)^2 = \frac{4}{3}$$
$$x + 1 = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \vee x + 1 = -\frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}$$
$$x = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} - 1 \vee x = -\frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} - 1$$
$$x \approx 0{,}15 \vee x \approx -2{,}15$$

$f''(0{,}15) = -6 \cdot 0{,}15 - 6 < 0$ d.h. x = 0,15 ist eine **Maximumstelle**
f(0,15) ≈ 3,08

Hochpunkt: HP(0,15/3,08)

$f''(-2{,}15) = -6 \cdot (-2{,}15) - 6 > 0$ d.h. x = -2,15 ist eine **Minimumstelle**
f(-2,15) = -3,08

Tiefpunkt: TP(-2,15/-3,08)

1.1.5

Bedingung für Wendepunkt:

Notwendig: f''(x) = 0
Hinreichend: f'''(x) ≠ 0 ist erfüllt, da f'''(x) = -6

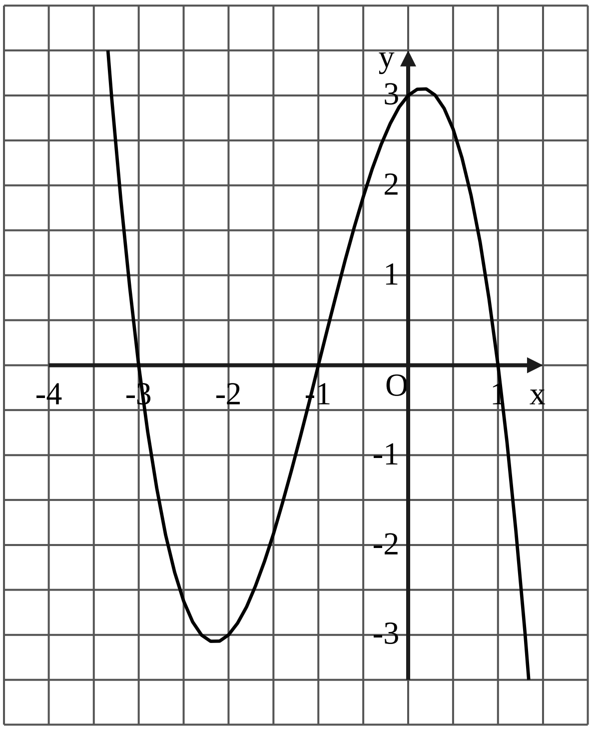
$$-6x - 6 = 0$$
$$x = -1$$
d.h. x = -1 ist Wendestelle
f(-1) = 0
W(-1/0)

1.1.6

Krümmungsintervalle

$-\infty;-1$ linksgekrümmt, da f''(x) > 0
$-1;\infty$ rechtsgekrümmt, da f''(x) < 0

1.2
Graph



1.3
wegen fehlender <u>Integralrechnung</u> noch nicht bearbeitet