2015-11-03 Übungsblatt Lösungen

1. Aufgabe:

Auf welches Endkapital wächst ein Kapital von 4352,40 € bei 3,5 % Zinsverzinsung in 8 Jahren an?

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

geg: K_0 = 4352,40 €; p = 3,5; n = 8 Jahre

ges: K_8

$$K_8 = 4352,40 \cdot 1,035^8$$

$$K_8 = 5731,28 \text{ €}$$

Das Endkapital nach 8 Jahren beträgt 5731,28 €.

2. Aufgabe:

Ein Sparer hat bei seiner Bank 2320 € eingezahlt. Welcher Zinssatz wurde vereinbart, wenn dem Kunden nach 10 Jahren 4154,77 € einschließlich Zinsenzinsen ausgezahlt werden?

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

geg: K_0 = 2320 €; K_{10} = 4154,77 €; n = 10 Jahre

ges: p

$$4154,77 = 2320 \cdot q^{10}$$

$$q = \sqrt[10]{\frac{4154,77}{2320}}$$

$$q \approx 1,06$$

Es wurde ein Zinssatz von 6% vereinbart.

3. Aufgabe:

Wie lange muss ein Kapital mit 4,5 % zinsverzinst werden, bis es seinen dreifachen Wert erreicht hat?

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

geg: $K_0 = K_0$ €; p = 4,5; $K_n = 3 \cdot K_0$

ges: n

$$3 \cdot K_0 = K_0 \cdot 1,045^n \quad | : K_0$$

$$3 = 1,045^n$$

$$n = \frac{\lg 3}{\lg 1,045}$$

$$n \approx 25$$

Das Kapital muss 25 Jahre zinsverzinst werden.

4. Aufgabe:

Ein Unternehmen berechnet, dass in 5 Jahren eine Erweiterungsinvestition in Höhe von 76.000 € erforderlich sein wird. Da das laufende Geschäftsjahr mit einem hohen Gewinn abgeschlossen hat, wird ein Teil des Gewinns zu 6% Zinseszinsen angelegt. Wie hoch muss die Einlage sein, damit in 5 Jahren das erforderliche Kapital zur Verfügung steht?

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

geg: K_5 = 76000 €; n = 5 Jahre; p = 6

ges: K_0

$$76000 = K_0 \cdot 1{,}06^5$$

$$K_0 = \frac{76000}{1{,}06^5}$$

$$K_0 \approx 56791{,}62$$

Es müssen heute 56791,62 € eingezahlt werden.

5. Aufgabe:

Ein Testament enthält folgende Bestimmungen:

a) Die älteste Tochter erhält nach einem Jahr 50.000 €.

b) Der Sohn erhält sofort 20.000 € und denselben Betrag noch einmal in zwei und in fünf Jahren.

c) Die jüngste Tochter soll nach sieben Jahren 80.000 € erhalten.

Wer hat am meisten geerbt, wenn mit einem Zinssatz von 7 % gerechnet wird?

Alle Erbschaftsbeträge auf den gleichen Zeitpunkt bringen, z.B. auf „**Heute**“

a) 50.000 € müssen abgezinst werden:

$$K_0 = \frac{50000}{1{,}07}$$

$$K_0 = 46728{,}97$$

Die älteste Tochter würde heute 46.728,97 € erhalten.

b)

$$K_0 = 20000 + \frac{20000}{1{,}07^2} + \frac{20000}{1{,}07^5}$$

$$K_0 = 51728{,}50$$

Der Sohn würde heute 51.728,50 € erhalten.

c) 80.000 € müssen abgezinst werden

$$K_0 = \frac{80000}{1{,}07^7}$$

$$K_0 = 49819{,}98$$

Die jüngste Tochter würde heute 49.819,98 € erhalten.

Der Sohn erbt am meisten.

6. Aufgabe:

Jemand, der 50.000 € geerbt hat, schließt einen Bausparvertrag ab und zahlt diesen Betrag ein. Außerdem überweist er an jedem Monatsanfang 150 € auf sein Konto bei der Bausparkasse. Über welches Guthaben verfügt er nach 8 Jahren, wenn sein Sparkapital mit 1,5 % zinsverzinst wird?

$$E_n = K_o \cdot q^n + r \cdot \frac{q^n - 1}{i}$$

Die monatliche Einzahlung von 150 € muss auf die Jahresrate umgerechnet werden, danach muss mit der „nachschüssigen Formel“ gerechnet werden.

a) Umrechnung in die Jahresrate:

$$r = r_m \cdot (12 + 6{,}5 \cdot i)$$

$$r = 150 \cdot (12 + 6{,}5 \cdot 0{,}015)$$

$$r = 1814{,}63$$

Die Jahresrate beträgt 1.814,63 €.

b) Berechnung des Endkapitals E_n:

$$E_8 = 50000 \cdot 1.015^8 + 1814{,}63 \cdot \frac{1{,}015^8 - 1}{0{,}015}$$

$$E_8 = 56324{,}63 + 15302{,}48$$

$$E_8 = 71627{,}11$$

Das Endguthaben beträgt 71.627,11 €.

7. Aufgabe:

Eine Rente von 3000 € sollte 15 Jahre lang zu Beginn eines jeden Jahres gezahlt werden. Welcher Betrag steht dem Berechtigten zu, wenn die Laufzeit 5 Jahre mehr betragen soll und ein Zinssatz von 5,5% zugrunde gelegt wird?

Bei beiden Rentenmodellen müssen die Rentenbarwerte übereinstimmen.

a) Berechnung des Rentenbarwertes S_0 beim ersten Rentenmodell:

$$S_0^V = r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{i \cdot q^n}$$

$$S_0^V = 3000 \cdot 1{,}055 \cdot \frac{1{,}055^{15} - 1}{0{,}055 \cdot 1{,}055^{15}}$$

$$S_0^V = 3165 \cdot 8{,}144237238...$$

$$S_0^V = 25776{,}51$$

Man müsste heute 25.776,51 € einzahlen, um 15 Jahre lang jeweils eine Jahresrente von 3000 € zu erhalten.

<u>b) Berechnung der jährlichen Rentenrate (Rentenmodell 2) bei gegebenem Rentenbarwert S_0 und der Laufzeit 20 Jahre</u>:

$$S_0^V = r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{i \cdot q^n}$$

$$25776{,}51 = r \cdot 1{,}055 \cdot \frac{1{,}055^{20} - 1}{0{,}055 \cdot 1{,}055^{20}}$$

$$25776{,}51 = r \cdot 1{,}055 \cdot 11{,}95038249...$$

$$r = 2044{,}51$$

Die jährliche Rente würde bei einer 20-jährigen Laufzeit nur 2.044,51 € betragen.

8. Aufgabe:

Jemand hat Anspruch auf eine nachschüssige Jahresrente von 8000 € zu 6 %, und das 18 Jahre lang. Wie viele Jahre könnte er bei gleichem Zinssatz eine Jahresrente von 6900 € beziehen?

Um die beiden Rentenmodelle zu vergleichen, müssen auch bei dieser Aufgabe die Rentenbarwerte übereinstimmen.

<u>a) Berechnung des Rentenbarwertes S_0 beim ersten Rentenmodell</u>:

$$S_0^N = r \cdot \frac{q^n - 1}{i \cdot q^n}$$

$$S_0^N = 8000 \cdot \frac{1{,}06^{18} - 1}{0{,}06 \cdot 1{,}06^{18}}$$

$$S_0^N = 8000 \cdot 10{,}82760348...$$

$$S_0^N = 86620{,}83$$

Man müsste heute 86.620,83 € der Bank zur Verfügung stellen, um 18 Jahre lang jeweils eine Jahresrente am Ende des Jahres von 8000 € zu erhalten.

<u>b) Berechnung der Laufzeit (Rentenmodell 2) bei gegebenem Rentenbarwert S_0 und der Jahresrente</u>:

$$S_0^N = r \cdot \frac{q^n - 1}{i \cdot q^n}$$

$$86620{,}83 = 6900 \cdot \frac{1{,}06^n - 1}{0{,}06 \cdot 1{,}06^n}$$

$$\frac{86620{,}83 \cdot 0{,}06}{6900} = \frac{1{,}06^n - 1}{1{,}06^n}$$

$$\frac{86620{,}83 \cdot 0{,}06}{6900} = 1 - \frac{1}{1{,}06^n}$$

$$0{,}24677541... = \frac{1}{1{,}06^n}$$

$$1{,}06^n = \frac{1}{0{,}24677541...}$$

$$n \approx 24$$

Man könnte eine Rente von 6.900 € 24 Jahre lang beziehen.

9. Aufgabe:

Jemand hat vor 40 Jahren jeden Monatsersten 200 € auf ein Konto einbezahlt. Während der gesamten Laufzeit wurde das Geld mit 3,5 % zinsverzinst. Er will sich das bis heute angesammelte Kapital verrenten lassen. Wie hoch wäre bei gleicher Verzinsung die monatliche Rente, die er jeweils am Monatsanfang in den nächsten 15 Jahren erwarten kann?

a) Berechnung des Rentenendwertes S_n bei monatlichen Raten:

Umwandlung der Monatsrate in eine Jahresrate und die Endwertberechnung mit der nachschüssigen Formel.

$$r = r_m \cdot (12 + 6{,}5 \cdot i)$$

$$r = 200 \cdot (12 + 6{,}5 \cdot 0{,}035)$$

$$r = 2445{,}50$$

$$S_n^N = r \cdot \frac{q^n - 1}{i}$$

$$S_{40}^N = 2445{,}50 \cdot \frac{1{,}035^{40} - 1}{0{,}035}$$

$$S_{40}^N = 206767{,}70$$

Nach 40 Jahren haben sich 206.767,70 € auf dem Konto angesammelt.

b) Berechnung der monatlichen Rentenrate bei gegebenem Rentenbarwert S_0, dem Zinssatz und der Laufzeit über 15 Jahre:

$$S_0^V = r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{i \cdot q^n}$$

$$206767,70 = r \cdot 1,035 \cdot \frac{1,035^{15} - 1}{0,035 \cdot 1,035^{15}}$$

$$\frac{206767,70 \cdot 0,035 \cdot 1,035^{15}}{1,035} = r \cdot (1,035^{15} - 1)$$

$$r = \frac{206767,70 \cdot 0,035 \cdot 1,035^{15}}{1,035 \cdot (1,035^{15} - 1)}$$

$$r = 17345,53$$

Die Jahresrente beträgt 17.345,53 €

Um jetzt die monatliche Rente zu berechnen – das habt ihr aber noch nicht im Unterricht behandelt – muss man sich Folgendes vorstellen:

„Wenn direkt am Jahresanfang vom Konto 17.345,53 € abgehen, ist das verzinsliche Restguthaben niedriger als bei 12 Monatsraten, d.h. es müssten bei monatlichen Raten ***etwas mehr*** *Zinsen dem Konto zufließen. Das würde bedeuten, dass die Summe der 12 Monatsrenten* ***etwas größer*** *als die Jahresrente ist. Wie würde man jetzt die Monatsrente ausrechnen?*

Du kannst diese Frage einmal deinem Mathelehrer stellen. Ich glaube, man müsste folgendermaßen rechnen (ohne Gewähr!)

$$r_m = \frac{r}{(12 - 6,5 \cdot i)}$$

$$r_m = \frac{17345,53}{(12 - 6,5 \cdot 0,035)}$$

$$r_m = \frac{17345,53}{11,7725}$$

$$r_m = 1473,39$$

Das wäre die Monatsrente; wenn du diesen Betrag mit 12 multiplizierst, erhältst du 17680,73 €,also etwas mehr als die Jahresrente!

10. Aufgabe:

Ein Angestellter hat bis zum Eintritt in seinen Ruhestand 180.000 € gespart. Diesen Betrag möchte er in eine jährliche vorschüssige Rente umwandeln lassen. Wie lange erhält er von der Bank eine jährliche Rente von 17.732 €, wenn er mit der Bank für die ganze Laufzeit einen Zinssatz von 3,2 % vereinbart?

$$S_0^V = r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{i \cdot q^n}$$

$$180000 = 17732 \cdot 1{,}032 \cdot \frac{1{,}032^n - 1}{0{,}032 \cdot 1{,}032^n}$$

$$\frac{180000 \cdot 0{,}032}{17732 \cdot 1{,}032} = \frac{1{,}032^n - 1}{1{,}032^n}$$

$$0{,}314764006 = 1 - \frac{1}{1{,}032^n}$$

$$0{,}685235994... = \frac{1}{1{,}032^n}$$

$$n \approx 12$$

Er würde 12 Jahre lang eine Jahresrente von 17732 € erhalten.

11. Aufgabe:

Dominikas Großeltern haben bei der Geburt ihrer Enkeltochter einen einmaligen Betrag von 5000 € bei der PKO Bank Polski zu 4,5 % angelegt. 5 Jahre später zahlen sie monatlich bis zum 20. Geburtstag ihrer Enkeltochter immer 50 € bei gleicher Verzinsung ein. Wie groß ist das Geldgeschenk, das sie ihrer Enkeltochter Dominika an ihrem 20. Geburtstag machen können?

$$E_n = K_0 \cdot q^n + S_n^N$$

<u>a) Umwandlung der monatlichen Rate in eine Jahresrate, dann mit der nachschüssigen Formel weiterrechnen</u>:

$$r = r_m \cdot (12 + 6{,}5 \cdot i)$$
$$r = 50 \cdot (12 + 6{,}5 \cdot 0{,}045)$$
$$r = 614{,}63$$

$$S_n^N = r \cdot \frac{q^n - 1}{i}$$

$$S_n^N = 614{,}63 \cdot \frac{1.045^{15} - 1}{0{,}045}$$

$$S_n^N = 12774{,}50$$

<u>b) Berechnung des Endkapitals E_n</u>:

$$E_n = 5000 \cdot 1{,}045^{20} + 12774{,}50$$
$$E_n = 24833{,}07$$

Dominika erhält an ihrem 20. Geburtstag 24.833,07 €.

12. Aufgabe:

Ein Kaufmann legt für das Studium seiner beiden Söhne 25.000 € zu 6,5 % auf Zinseszins an. 3 Jahre lang hebt er am Ende eines jeden Jahres 6000 € ab. Am Ende des 4. Jahres soll der Rest des Guthabens unter den beiden Söhnen gleichmäßig aufgeteilt werden. Wie viel Euro erhält jeder Sohn?

Bei dieser Aufgabe geht es um einen „Kapitalabbau".

$$E_n = K_0 \cdot q^n - r \cdot \frac{q^n - 1}{i}$$

$$E_n = 25000 \cdot 1{,}065^3 - 6000 \cdot \frac{1{,}065^3 - 1}{0{,}065}$$

$$E_3 = 30198{,}74 - 19195{,}35$$

$$E_3 = 11003{,}39$$

Nach 3 Jahren verbleiben auf dem Konto noch 11.003,39 €

Dieser Betrag wird jetzt noch ein Jahr mit 6,5 % verzinst.

$$E_4 = 11003{,}39 \cdot 1{,}065$$

$$E_4 = 11718{,}61$$

Am Ende des 4. Jahres werden 11.718,61 an die beiden Söhne gleichmäßig verteilt. Jeder erhält 5.859,30 €

13. Aufgabe:

10.000 € werden 5 Jahre lang

- jährlich
- monatlich
- täglich

zu einem Nominalzinssatz von 3,5 % verzinst.

Berechne die Guthabenunterschiede.

Jährlich:

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

$$K_5 = 10000 \cdot 1{,}035^5$$

$$K_5 = 11876{,}86$$

Monatlich

$$K_n = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100 \cdot m})^{m \cdot n}$$

$$K_5 = 10000 \cdot (1 + \frac{3,5}{100 \cdot 12})^{12 \cdot 5}$$

$$K_5 = 11909,43$$

Täglich

$$K_n = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100 \cdot m})^{m \cdot n}$$

$$K_5 = 10000 \cdot (1 + \frac{3,5}{100 \cdot 365})^{365 \cdot 5}$$

$$K_5 = 11912,36$$

Die Guthabenunterschiede betragen:

Jährlich – monatlich: 32,57 €

Jährlich – täglich: 35,50 €

14. Aufgabe:

Die Bank verlangt für einen einjährigen Kredit 12 % Zinsen (nominell).

Berechne den effektiven Zinssatz bei monatlicher Verzinsung.

$$i_{eff} = (1 + \frac{i_{nom}}{m})^m - 1$$

$$i_{eff} = (1 + \frac{0,12}{12})^{12} - 1$$

$$i_{eff} = 0,12682503....$$

12 % nominell 12,68 % effektiv bei monatlicher Verzinsung.

<u>Oder ohne Formel</u>

$$K_1 = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^1$$

$$K_1 = K_0 \cdot (1 + \frac{12}{100})^1$$

$$K_1 = K_0 \cdot 1,12$$

Verzinsung mit 12 % nominell.

$$K_1 = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100 \cdot m})^m$$

$$K_1 = K_0 \cdot (1 + \frac{12}{100 \cdot 12})^{12}$$

$$K_1 = K_0 \cdot 1{,}12682503$$

Verzinsung mit 12,68 % effektiv.

15. Aufgabe:

Sie legen 100 € an. Für die Verzinsung wird ein nomineller Jahreszinssatz von 6 % p.a. angegeben. Der Zinszuschlag erfolgt monatlich, wobei die gutgeschriebenen Zinsen wieder mitverzinst werden.

Gib den effektiven Zinssatz an.

Auf welchen Betrag sind 100 € nach 10 Jahren angewachsen?

$$K_1 = 100 \cdot (1 + \frac{p}{100 \cdot m})^m$$

$$K_1 = 100 \cdot (1 + \frac{6}{100 \cdot 12})^{12}$$

$$K_1 = 100 \cdot 1{,}06167...$$

$$K_1 = 106{,}17$$

Der effektive Zinssatz beträgt 6,17 %, 100 € sind auf 106,17 € angewachsen.