# 1. e - Funktion : Beispiel einer Kurvendiskussion

$$f(x) = e^{2x} - 2e^{x}$$

## 1, Definitionsbereich:

$$D_{max} = \mathbb{R}$$

## 2, Ableitungen:

$$f'(x) = 2 \cdot e^{2x} - 2e^{x}$$

Anwendung der Kettenregel bei $(e^{2x})'$

$$\underline{\underline{f'(x) = 2 \cdot e^{x} \cdot (e^{x} - 1)}}$$

Beachte: $e^{2x} = \cancel{ex}(e^{x})^{2} = e^{x} \cdot e^{x}$

$$f''(x) = \underline{2 \cdot e^{x}} \cdot (e^{x} - 1) + \underline{2e^{x}} \cdot e^{x}$$

$$f''(x) = 2 \cdot e^{x} \cdot ((e^{x} - 1) + e^{x})$$

$$\underline{\underline{f''(x) = 2 \cdot e^{x} \cdot (2e^{x} - 1)}}$$

Anwendung der Produktregel:

$u = 2 \cdot e^{x}$

$v = e^{x} - 1$

$u' = 2e^{x}$

$v' = e^{x}$

## 3, Nullstellen:

Bed: $f(x) = 0$

$e^{2x} - 2e^{x} = 0$ Faktorisieren!

$e^{x} \cdot (e^{x} - 2) = 0$

$e^{x} = 0 \lor e^{x} - 2 = 0$

$/ \quad e^{x} = 2$

$$\underline{\underline{x = \ln 2}}$$

$$\underline{\underline{N(\ln 2 / 0)}}$$

## 4, Symmetrie:

Klappsym. zur y-Achse: $f(x) = f(-x)$

Punktsym. zum Ursprung: $f(x) = -f(-x)$

$f(x) = e^{2x} - 2e^{x}$ Setze $e^{x} = u$

$f(x) = u^{2} - 2u$ : keine Symmetrie, da Exponenten gerad- und ungerad-~~z~~ahlig sind.

② 5, <u>Monotonie und Extrema:</u>

<u>Bed:</u> $f'(x) = 0$ ; Vorzeichenwechsel von $f'(x)$ <u>oder</u>

$f''(x) \neq 0$ mit

$f''(x) > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt

$f''(x) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt

$$2 \cdot e^x \cdot (e^x - 1) = 0$$
$$2 \cdot e^x = 0 \lor e^x - 1 = 0$$
$$/ \qquad e^x = 1$$
$$\underline{\underline{x = 0}}$$

| $x$ | $-1$ | $0$ | $+1$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

An der Stelle $x = 0$: $\underline{\underline{TP}}$

$$f'(-1) = 2 \cdot e^{-1} \cdot (e^{-1} - 1) < 0$$
$$= \underbrace{2 \cdot \frac{1}{e}}_{>0} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{e} - 1\right)}_{<0}$$

$$f'(1) = \underbrace{2 \cdot e^1}_{>0} \cdot \underbrace{(e^1 - 1)}_{>0} > 0$$

$$T(0/f(0)) = \underline{\underline{T(0/-1)}}$$

$$f(0) = e^0 \cdot (e^0 - 2)$$
$$= 1 \cdot (1 - 2)$$
$$= -1$$

Nachweis des Tiefpunktes mit Hilfe von $f''(x)$:

$$f''(0) = 2 \cdot e^0 \cdot (2 \cdot e^0 - 1)$$
$$= 2 \cdot 1 \cdot (2 \cdot 1 - 1)$$
$$= 2 \cdot 1 > 0 \Rightarrow TP$$

<u>Monotonieintervalle:</u> $]-\infty; 0]$ str. m. f.

$[0; +\infty[$ st. m. st.

## ③ 6, Krümmung und Wendepunkte

**Bed:** $f''(x) = 0$ ; Vorzeichenwechsel von $f''(x)$

$$2 \cdot e^x \cdot (2e^x - 1) = 0$$

$$2 \cdot e^x = 0 \lor 2e^x - 1 = 0$$

$$\not{\cdot} \qquad e^x = \frac{1}{2}$$

$$x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$x = \underbrace{\ln 1}_{0} - \ln 2$$

$$\underline{\underline{x = -\ln 2}}$$

| $x$ | $-1$ | $-\ln 2$ | $0$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ RK | $0$ | $+$ LK |

Hier kannst du auch die Krümmungsintervalle ablesen!

$$f''(-1) = 2 \cdot e^{-1} \cdot (2 \cdot e^{-1} - 1) < 0$$

$$= \frac{2}{e} \cdot \left(\frac{2}{e} - 1\right)$$

$$\quad >0 \qquad <0$$

$$f''(0) = 2 \cdot e^0 \cdot (2 \cdot e^0 - 1) > 0$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot (2 \cdot 1 - 1)$$

$$\quad >0 \qquad >0$$

$$W(-\ln 2 / f(-\ln 2))$$

$$f(-\ln 2) = e^{2 \cdot (-\ln 2)} - 2 \cdot e^{-\ln 2}$$

$$= e^{-2 \cdot \ln 2} - 2 \cdot e^{-\ln 2}$$

$$= \frac{1}{e^{2 \cdot \ln 2}} - \frac{2}{e^{\ln 2}}$$

$$= \frac{1}{(e^{\ln 2})^2} - \frac{2}{e^{\ln 2}}$$

e und ln sind Umkehroperationen, d.h. e hebt ln wieder auf ~~bzw.~~ umgekehrt

$$2 \xrightarrow{\ln} \ln 2 \xrightarrow{e} e^{\ln 2} = 2 \quad \text{bzw.}$$

$$2 \xrightarrow{e} e^2 \xrightarrow{\ln} \ln e^2 = 2$$

④ allgemein:

$$a \xrightarrow{\ln} \ln a \xrightarrow{e} \underline{\underline{e^{\ln a} = a}}$$

$$a \xrightarrow{e} e^{a} \xrightarrow{\ln} \underline{\underline{\ln e^{a} = a}}$$

$$f(-\ln 2) = \frac{1}{2^2} - \frac{2}{2} = -\frac{3}{4}$$

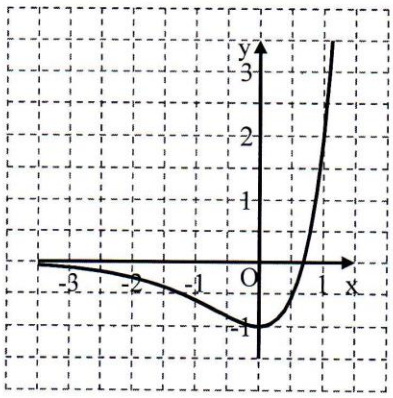
$$\underline{\underline{W\left(-\ln 2 / -\frac{3}{4}\right)}}$$

7, Grenzwerte:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \underbrace{(e^{x}-2)}_{-2} \cdot \underbrace{e^{x}}_{0} = 0^{-}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{(e^{x}-2)}_{+\infty} \cdot \underbrace{e^{x}}_{+\infty} = +\infty$$

8, Graph:




Übungsaufgabe:

Fertige eine Kurvendiskussion nach obigem Muster für $f$ mit $f(x) = (x^2-1) \cdot e^{x}$ an.
(siehe auch Buch S. 158 Nr. 9 b)