2014-10-08

Übungsblatt

Nullstellenberechnungen

1. Notwendige Bedingung für eine Nullstelle:
   x ist Nullstelle, wenn f(x) = 0 ist.

2. Nullstelle einer linearen Funktion:
   Gleichung einer linearen Funktion: $f(x) = m \cdot x + b$

   Ansatz:

   $f(x) = 0$

   $m \cdot x + b = 0$

   $x = -\frac{b}{m}$

   Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade.
   Die Gerade lässt sich zeichnen mit Hilfe
   - y-Achsenabschnitt, Steigungsdreieck
     oder
   - Wertetabelle

   Beispiel:

   $f(x) = 2 \cdot x - 3$

   $f(x) = 0$

   $2 \cdot x - 3 = 0$

   $x = -\frac{-3}{2}$

   $x = \frac{3}{2}$

   Von -3 auf der y-Achse (y-Achsenabschnitt) geht man 1 nach rechts und 2 nach oben (Steigungsdreieck).
   Mögliche Wertetabelle:

x	-1	2
f(x)	-5	1

3. Nullstellen einer quadratischen Funktion:
   Gleichung einer quadratischen Funktion: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

   Ansatz:

   $f(x) = 0$

   $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \quad | : a$

   $x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0$

   $x^2 + p \cdot x + q = 0 \quad \text{mit} \quad p = \frac{b}{a} \quad \text{und} \quad q = \frac{c}{a}$

   Die quadratische Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$ (Normalform) lässt sich lösen mit Hilfe
   - der quadratischen Ergänzung
     oder
   - p-q Formel

   Beispiel:

   $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$

   $f(x) = 0$

   $2x^2 + 4x - 6 = 0 \quad | :2$

   $x^2 + 2x - 3 = 0$

   p = 2; q = -3

   $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

   Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine Parabel. Um die Parabel zu zeichnen, muss am die Koordinaten des Scheitelpunktes bestimmen:

   $SP(x_s / y_s)$

   $x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1 + (-3)}{2} = -1$

   $y_s = 2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 6 = -8$

   $SP(-1 / -8)$

$$x_{1,2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-3)}$$
$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{(1)^2 + 3}$$
$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{4}$$
$$x_1 = 1 \quad \text{und} \quad x_2 = -3$$

Eine quadratische Funktion kann zwei, eine doppelte oder keine Nullstelle haben.

4. Nullstellen eines Polynoms höheren Grades (Grad 3 und mehr):
Gleichung einer Polynomfunktion höheren Grades (ganzrationale Funktion):
$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_1 \cdot x + a_0$$
Die Nullstellen werden bestimmt, in dem man das Polynom in Linearfaktoren zerlegt. (Faktorisieren)

a. Bestimme die Nullstellen der folgenden Polynomfunktion 3. Grades.
(Methode: Ausklammern und Anwendung einer binomischen Formel)

$$f(x) = 2x^3 - 8x$$

Ansatz:
$$f(x) = 0$$
$$2x^3 - 8x = 0$$
$$2x \cdot (x^2 - 4) = 0 \qquad \text{2x ausgeklammert}$$
$$2x \cdot (x+2) \cdot (x-2) = 0 \qquad \text{Zerlegung mit Hilfe der 3. binomischen Formel}$$
$$2x = 0 \vee (x+2) = 0 \vee (x-2) = 0$$
$$x = 0 \vee x = -2 \vee x = 2 \qquad \rightarrow \textbf{Nullstellen}$$

Wichtig: Kommt mit Sicherheit in der Arbeit!

b. Bestimme die Nullstellen der folgenden Polynomfunktion 4. Grades, wenn bei x = 5 eine Nullstelle vorliegt.
(Methode: Abspalten der Nullstelle und Bestimmung der Nullstellen des Restpolynoms g(x): f(x) = (x – 5)· g(x)

$$f(x) = x^4 - 5x^3 - 8x + 40$$

Ansatz :
$$f(x) = 0$$
$$x^4 - 5x^3 - 8x + 40 = 0$$

Polynomdivision
$$(x^4 - 5x^3 - 8x + 40) : (x-5) = (x^3 - 8)$$

$$(x-5) \cdot (x^3 - 8) = 0$$
$$(x-5) = 0 \vee (x^3 - 8) = 0$$
$$x = 5 \vee x = 2 \qquad \rightarrow \textbf{Nullstellen}$$

c. Bestimme die Nullstellen der folgenden Polynomfunktion 3. Grades.
(Methode: Nullstelle erraten, Polynomdivision, Argumentieren bei der Nullstellenbestimmung des Restpolynoms)

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$$

Erraten: x = 1 ist Nullstelle

Ansatz :

$f(x) = 0$

$x^3 - 3x^2 + 5x - 3 = 0$

Polynomdivision

$(x^3 - 3x^2 + 5x - 3) : (x - 1) = x^2 - 2x + 3$

$(x - 1) \cdot (x^2 - 2x + 3) = 0$

$(x - 1) = 0 \vee (x^2 - 2x + 3) = 0$

$x = 1$ → **nur eine Nullstelle, da das Restpolynom nicht lösbar ist.**