Beweise Ableitungsregeln

1. Summenregel

Vor.:	f(x)	=	u(x) + v(x)
Beh.:	f’(x)	=	u’(x) + v’(x)
Bew.:	f’(x)	=	$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{u(x)+v(x)-u(x_o)-v(x_0)}{x \to x_0}$ (Def. der Ableitung)
	f’(x)	=	$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{u(x)-u(x_0)+v(x)-v(x_0)}{x-x_0}$ (Kommutativgesetz)
	f’(x)	=	$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}+\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}$ (Bruchrechnung)
	f’(x)	=	$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}+\lim\limits_{x\to x_0} \frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}$ (Grenzwertsatz)
	f’(x)	=	u’(x) + v’(x) (Grenzwertbestimmung)

2. Produktregel

Vor.:	f(x)	=	u(x) • v(x)
Beh.:	f’(x)	=	u’(x) • v(x) + v’(x) • u(x)
Bew.:	f’(x)	=	$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{u(x)\cdot v(x)-u(x_0)\cdot v(x_0)}{x-x_0}$ (Def. der Ableitung)
	f’(x)	=	$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{u(x)\cdot v(x)-u(x_0)\cdot v(x_0)+u(x)\cdot v(x_0)-u(x)\cdot v(x_0)}{x-x_0}$ geeignetes Addieren und Subtrahieren
	f’(x)	=	$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{u(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x_0)+u(x)\cdot v(x_0)-u(x_0)\cdot v(x_0)}{x-x_0}$ geeignetes Umordnen
	f’(x)	=	$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{u(x)\cdot(v(x)-v(x_0))+v(x_0)\cdot(u(x)-u(x_0))}{x-x_0}$ Ausklammern
	f’(x)	=	$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{u(x)\cdot(v(x)-v(x_0))}{x-x_0}+\frac{v(x_0)\cdot((u(x)-u(x_0))}{x-x_0}$ Bruchrechnung
	f’(x)	=	$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{u(x)\cdot(v(x)-v(x_0))}{x-x_0}+\lim\limits_{x\to x_0} \frac{v(x_0)\cdot((u(x)-u(x_0))}{x-x_0}$ Grenzwertsatz
	f’(x)	=	$\lim\limits_{x\to x_0} u(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} \frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}+\lim\limits_{x\to x_0} v(x_0)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} \frac{(u(x)-u(x_0)}{x-x_0}$ Grenzwertsatz
	f’(x)	=	$u(x_0)\cdot v'(x_0)+v(x_0)\cdot u'(x_0)$ Grenzwertbestimmung
	f’(x)	=	$u(x)\cdot v'(x)+v(x)\cdot u'(x)$ gilt für jede Stelle x_0

3. Quotientenregel

Vor.:	f(x)	=	$\frac{u(x)}{v(x)}$
Beh.:	f'(x)	=	$\frac{u'(x)\cdot v(x)-v'(x)\cdot u(x)}{v^2(x)}$
Bew.:	f(x)	=	$\frac{u(x)}{v(x)}$
	$f(x)\cdot v(x)$	=	u(x)
	$(f(x)\cdot v(x))'$	=	u'(x)
	$f'(x)\cdot v(x)+v'(x)\cdot f(x)$	=	u'(x)
	$f'(x)\cdot v(x)$	=	u'(x) - $v'(x)\cdot f(x)$
	$f'(x)\cdot v(x)$	=	u'(x) - $v'(x)\cdot\frac{u(x)}{v(x)}$
	$f'(x)\cdot v(x)$	=	$\frac{u'(x)\cdot v(x)-v'(x)\cdot u(x)}{v(x)}$
	f'(x)	=	$\frac{u'(x)\cdot v(x)-v'(x)\cdot u(x)}{v^2(x)}$

4. Kehrwertregel

Vor.:	f(x)	=	$\frac{1}{u(x)}$ Der Funktionsterm einer Funktion f ist der Kehrwert einer Funktion u(x) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ mit $u(x)=\sqrt{x}$
Beh.:	f'(x)	=	$-\frac{u'}{u^2}$
Bew.:	f'(x)	=	$\frac{0\cdot u(x)-u'(x)\cdot 1}{u^2}$ Anwendung der Quotientenregel
	f'(x)	=	$\frac{-u'}{u^2}$
			obiges Beispiel: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ $u(x)=\sqrt{x}$ $u'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$ $u^2(x)=x$ $f'(x)=-\frac{\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}}{x}$ $f'(x)=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$